$\frac{2}{12}$

/ /

أجب: 1 إذا كانت f دالة ثابتة

$$f: D \to F ; \quad x \to f(x) = c$$

فإنها قابلة للمفاضلة في كل نقطة داخلية من D و $df(x)$ هو التطبيق الصفري لـ E في F وعندئذ:

$$df: D^{\circ} \longrightarrow \mathcal{L}(E, F)$$
$$x \longrightarrow df(x)$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c - 0}{\|h\|} = 0$$

2 الدالة الحقيقية بمتغيرين:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \sin x^2 \cdot y^2}{(e^{x^2}-1)(e^{y}-1)} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0)$ وتفاضلها $df(0,0)$ هو التطبيق الصفري

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(h+0, k+0) - f(0,0) - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\dfrac{h \sin h^2 \cdot k^2}{(e^{h^2}-1)(e^{k}-1)}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h \cdot \sin h^2 \cdot k^2}{(e^{h^2}-1)(e^{k}-1)(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\sin h^2 \cdot k^2}{h^2 \cdot k^2} \cdot \frac{h^2}{(e^{h^2}-1)} \cdot \frac{k}{(e^{k}-1)} \cdot \frac{h \cdot k}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{\sin h^2 \cdot k^2}{h^2 \cdot k^2} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{(e^{h^2}-1)} \cdot \lim_{k \to 0} \frac{k}{(e^{k}-1)} \cdot \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h \cdot k}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

حيث:

$\div hk$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{h \cdot k}{(h^2+k^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{1}{\left(\frac{1}{k^2} + \frac{1}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

/ /

أي أن f قابلة للمفاضلة في النقطة (0,0)

وتفاضلها $df(0,0) = 0$

3 إن الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\ ;\ (x,y) \to xy$

قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$

وأن تفاضلها $df(x_0,y_0)$

هو الدالة الخطية

$$df(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (h,k) \to \underset{(x_0,y_0)}{df}(h,k) = y_0 h + x_0 k$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h+x_0, k+y_0) - f(x_0,y_0) - (y_0 h + x_0 k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(h+x_0)(k+y_0) - (y_0 h + x_0 k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h.k + h.y_0 + x_0.k + x_0.y_0 - x_0.y_0 - y_0.h - x_0.k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h.k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

أي أن الدالة قابلة للمفاضلة في كل النقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$ وتفاضلها

$$\underset{(x_0,y_0)}{df}(h,k) = y_0.h + x_0.k$$

4 الدالة $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (x+y, xy)$

قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0,y_0) من $\mathbb{R}^2$ وتفاضلها هو التطبيق

الخطي:

$$df(x_0,y_0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (h,k) \to (h+k,\ y_0.h + x_0.k)$$

/ /

المعين بالمصفوفة $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$ فإن الدالتين المركبتين

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \longrightarrow x + y$$

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; (x, y) \longrightarrow x \cdot y$$

قابلتين للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من $\mathbb{R}^2$، وذلك لأنه،

لنبرهن على قابلية المفاضلة للدالة f_1

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f_1(x_0+h, y_0+k) - f_1(x_0, y_0) - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{x_0 + h + y_0 + k - x_0 - y_0 - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

ومنه فإن f_1 قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من $\mathbb{R}^2$ ولقد رأينا سابقاً أن f_2 قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من $\mathbb{R}^2$ وتفاضلها ~~$df_{2(x_0,y_0)}(h,k)$~~

$$df_{2(x_0,y_0)}(h,k) = y_0 h + x_0 k$$

ينتج أن الدالة f قابلة للمفاضلة في كل نقطة (x_0, y_0) من $\mathbb{R}^2$.

مبرهنة: لتكن f و g دالتين معرفتين على المجموعة الجزئية D من E وتأخذ قيمها في F ولنفرض أنهما قابلتان للمفاضلة في النقطة الداخلية a من D عندئذٍ فإن:

1. $f+g$ قابلة للمفاضلة في النقطة a وتفاضلها

$$d(f+g)_a = df_a + dg_a$$

2. إذا كان ρ عدداً حقيقياً فإن الدالة ρf قابلة للمفاضلة في a وتفاضلها

$$d(\rho f)_a = \rho \, df_a$$

البرهان: 1. بما أن كل من f و g قابلة للمفاضلة في النقطة a فإنه توجد دالتان ε_1 و ε_2 معرفتان على جوار w للنقطة 0 في E بحيث يكون:

★ $f(a+h)=f(a)+df_a(h)+\|h\|\,\varepsilon_1(h);\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$

$g(a+h)=g(a)+dg_a(h)+\|h\|\,\varepsilon_2(h);\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_2(h)=0$

وذلك $\forall h\in w$

وبجمع المساواتين طرفاً إلى طرف نجد :

$(f+g)(a+h)=(f+g)(a)+(df_a+dg_a).(h)+\|h\|(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(h)$

$;\ \lim_{h\to 0}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(h)=0$

وبما أن df_a+dg_a تطبيقاً خطياً

و $\lim_{h\to 0}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(h)=0$

فإننا نستنتج أن الدالة $f+g$ قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية a من D وأن تفاضلها

$d(f+g)_a=df_a+dg_a$

2 إذا ضربنا طرفي ★ بالعدد الحقيقي ρ ينتج

$(\rho f)(a+h)=(\rho f)(a)+(\rho df_a).(h)+\|h\|(\rho\varepsilon_1)(h)$

$;\ \lim_{h\to 0}\varepsilon_1(h)=0$

وبما أن ρdf_a دالة خطية وأن $\lim_{h\to 0}(\rho\varepsilon_1)(h)=0$

فإننا نستنتج أن الدالة ρf قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية a من D وأن تفاضلها

$d(\rho f)_a=\rho df_a$

مثال 3 لتكن $a,b,c\ ,\alpha,\beta,\gamma$ أعداد حقيقية فيها α,β,γ غير سالبة وتحقق $\alpha+\beta+\gamma>1$ أثبت أن الدالة الحقيقية f المعرفة على $\mathbb{R}^3$ بالشكل

$$F(x,y,z)=ax+by+cz+|x|^{\alpha}.|y|^{\beta}.|z|^{\gamma}$$

/ /

قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0,0)$ وأوجد تفاضلها في هذه النقطة.

لو أخذنا الدالة:
$$U(x,y,z) = |x|^{\alpha} \cdot |y|^{\beta} |z|^{\gamma}$$

نلاحظ أن:
$$0 \le \frac{|x|^{\alpha} \cdot |y|^{\beta} \cdot |z|^{\gamma}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \le \frac{|x|^{\alpha} |y|^{\beta} \cdot |z|^{\gamma}}{[(\sup(|x|,|y|,|z|)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\le \frac{\sup(|x|,|y|,|z|)^{\alpha+\beta+\gamma}}{\sup(|x|,|y|,|z|)} = (\sup(|x|,|y|,|z|))^{\alpha+\beta+\gamma-1}$$

وبما أن

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} [\sup(|x|,|y|,|z|)]^{\alpha+\beta+\gamma-1} = 0$$

ومنه
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{|x|^{\alpha} \cdot |y|^{\beta} \cdot |z|^{\gamma}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

أي أن

$$\lim_{(h,k,L)\to(0,0,0)} \frac{(h+0,k+0,L+0) - U(0,0,0) - 0}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}}$$

$$\lim_{(h,k,L)\to(0,0,0)} \frac{|h|^{\alpha} |k|^{\beta} |L|^{\gamma} - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}} = 0$$

أي أن الدالة $U(x,y,z)$ قابلة للمفاضلة وتفاضلها هو الدالة الصفرية.

وإذا وضعنا $V(x,y,z) = ax+by+cz$ فإن V قابلة للمفاضلة وتفاضلها $ah+bk+cL$
وذلك لأن:

$$\lim_{(h,k,L)\to(0,0,0)} \frac{V(h+0,k+0,L+0) - V(0,0,0) - (ah+bk+cL)}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}}$$

$$= \lim_{(h,k,L)\to(0,0,0)} \frac{ah+bk+cL-0-ah-bk-cL}{\sqrt{h^2+k^2+L^2}} = 0$$

أي أن الدالة V قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0,0)$ وتفاضلها $dV_{(0,0,0)}(h,k,l) = ah + bk + cL$

وحسب المبرهنة الأخيرة (1) تكون الدالة

$$f(x,y,z) = V(x,y,z) + U(x,y,z)$$

قابلة للمفاضلة في النقطة $(0,0,0)$ وتفاضلها

$$df_{(0,0,0)}(h,k,L) = dV_{(0,0,0)}(h,k,L) + dU_{(0,0,0)}(h,k,L)$$

أي

$$df_{(0,0,0)}(h,k,L) = ah + bk + cL + 0$$

المشتقات الجزئية:

تعريف: لتكن $f: D \to \mathbb{R}$; $x = (x_1, \ldots, x_n) \to f(x)$; $D \subseteq \mathbb{R}^n$ دالة حقيقية لعدة متغيرات و $a(a_1, \ldots, a_n)$ نقطة داخلية من D لنعرف الدالة الحقيقية بمتغير حقيقي واحد.

$$\varphi_j : D_j \to \mathbb{R} ; x_j \to \varphi_j(x_j) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

حيث

$$D_j = \{x_j \in \mathbb{R} ; (a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) \in D\}$$

نقول أن للدالة f مشتقاً جزئياً بالنسبة للمتغير x_j في النقطة a إذا وفقط إذا كانت الدالة φ_j قابلة للاشتقاق في النقطة a_j وبالتالي إذا وفقط إذا وجدت النهاية:

$$\lim_{h_j \to 0} \frac{\varphi_j(a_j + h_j) - \varphi_j(a_j)}{h_j}$$

$$= \lim_{h_j \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_j, \ldots, a_n)}{h_j}$$

/ /

وعندئذ نسمي هذه النهاية (العدد $\psi'_j(a_j)$) المشتق الجزئي بالنسبة للمتغير x_j للدالة f في النقطة a ونرمز له برمز

$$D_j f(a) , \quad f_{x_j}(a) , \quad f'_{x_j}(a) , \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

وإذا كان للدالة f مشتق جزئي بالنسبة للمتغير x_j في كل نقطة من مجموعة مفتوحة V من $\mathbb{R}^n$ فإننا نرمز بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ، f'_{x_j} ، f_{x_j} ، $D_j f$ للدالة:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} : V \to \mathbb{R} ; (a_1, \ldots, a_n) \to \psi'_j(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

وتسمى الدوال $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ المشتقات الجزئية

الأولى للدالة f بالنسبة لـ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ على الترتيب.

نتيجة: إذا كانت الدالة الحقيقية

$$f : D \to \mathbb{R} ; (x_1, x_2, \ldots, x_n) ; D \subseteq \mathbb{R}^n$$

قابلة للمفاضلة في النقطة الداخلية $a = (a_1, \ldots, a_n)$ من D فإن لها مشتقات جزئية بالنسبة للمتغيرات $x_1, x_2, \ldots, x_n$ في النقطة a ~~وبالإشتقاق~~ وبالاستناد إلى (1) من الحالة الخاصة لقابلية المفاضلة توجد أعداد ~~حقيقية~~ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ودالة حقيقية ε معرفة على جوار W للنقطة 0 من $\mathbb{R}^n$ بحيث إذا كان $h(h_1, \ldots, h_n) \in W$ فإن:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot h_i + \|h\| \cdot \varepsilon(h) ; \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

وبالتالي إذا وضعنا $W_j = \{h_j (0, \ldots, 0, h_j, 0, \ldots, 0) \in W\}$ وكان $h_j \in W_j$ فعندئذ:

$$\psi_j(a_j + h_j) - \psi_j(a_j) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}, h_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$$

$$= A_j \cdot h_j + |h_j| \, \varepsilon(h)$$

ومنه

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \lim_{h_j \to 0} \frac{\varphi_j(a_j + h_j) - \varphi_j(a_j)}{h_j}$$

$$= \lim_{h_j \to 0} \frac{A_j h_j + |h_j| \, \varepsilon(h)}{h_j} = A_j$$

وعندئذ يمكن أن نكتب:

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot h_i + \|h\| \cdot \varepsilon(h)$$

$$\partial f_a = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot h_i$$